NOTATION

x et t sont dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, et n dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels strictement positifs.

(c_1), (s_1), (C_1), (S_1), (c_2), (s_2), (C_2) et (S_2) désignent les séries dont le terme de rang n est la fonction réelle du couple (x,t) :

$$c_{1,n} : (x,t) \longrightarrow c_{1,n}(x,t) = x^{2n-1} \cos (2n-1)\, t \quad \text{pour } (c_1),$$

$$s_{1,n} : (x,t) \longrightarrow s_{1,n}(x,t) = x^{2n-1} \sin (2n-1)\, t \quad \text{pour } (s_1),$$

$$C_{1,n} : (x,t) \longrightarrow C_{1,n}(x,t) = \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \cos (2n-1)t \quad \text{pour } (C_1),$$

$$S_{1,n} : (x,t) \longrightarrow S_{1,n}(x,t) = \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \sin (2n-1)t \quad \text{pour } (S_1),$$

$$c_{2,n} : (x,t) \longrightarrow c_{2,n}(x,t) = x^{2n} \cos 2nt \quad \text{pour } (c_2),$$

$$s_{2,n} : (x,t) \longrightarrow s_{2,n}(x,t) = x^{2n} \sin 2nt \quad \text{pour } (s_2),$$

$$C_{2,n} : (x,t) \longrightarrow C_{2,n}(x,t) = \frac{x^{2n}}{2n} \cos 2nt \quad \text{pour } (C_2), \text{ et}$$

$$S_{2,n} : (x,t) \longrightarrow S_{2,n}(x,t) = \frac{x^{2n}}{2n} \sin 2nt \quad \text{pour } (S_2).$$

Lorsque ces séries sont convergentes on désigne par c_1, s_1, C_1, S_1, c_2, s_2, C_2 et S_2 les fonctions de (x,t) qui sont leurs sommes respectives et dont les valeurs sont notées $c_1(x,t)$, $s_1(x,t)$, $C_1(x,t)$, $S_1(x,t)$, $c_2(x,t)$, $s_2(x,t)$, $C_2(x,t)$ et $S_2(x,t)$ respectivement.

QUESTION PRELIMINAIRE

Supposant $|x| \neq 1$ et t dans $\mathbb{R}$, étudier la convergence des séries numériques de terme général respectif $c_{1,n}(x,t)$, $s_{1,n}(x,t)$, $C_{1,n}(x,t)$, $S_{1,n}(x,t)$, $c_{2,n}(x,t)$, $s_{2,n}(x,t)$, $C_{2,n}(x,t)$ et $S_{2,n}(x,t)$.

Dans la suite du problème on supposera : $|x| \leqslant 1$.

I- PREMIERE PARTIE

Dans cette partie, x est un paramètre dont la valeur est dans $]-1,+1[$ et t est une variable dans $\mathbb{R}$.

I.1. Montrer que les séries (c_1), (s_1), (C_1), (S_1) de fonctions de t sont uniformément convergentes sur $\mathbb{R}$ et en déduire que les fonctions c_1, s_1, C_1 et S_1 sont continues sur $\mathbb{R}$.

I.2. Déterminer c_1 et s_1 en considérant $z_1 = c_1 + is_1$ où i est le complexe ayant 1 pour module et $\frac{\pi}{2}$ pour argument .

Soit $\varepsilon > 0$, on désigne par u_p le terme général et par U la somme de l'une quelconque des séries (c_1), (s_1), (C_1) ou (S_1) : déterminer un entier n_o, indépendant de t, tel que pour tout $n \geqslant n_o$ et tout t de $\mathbb{R}$ on ait

$$\left| U(x,t) - \sum_{p=0}^{n} u_p(x,t) \right| \leqslant \varepsilon \quad .$$

I.3. Démontrer que S_1 et C_1 sont des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$ et déterminer leurs expressions respectives sous forme de combinaison de fonctions élémentaires.

I.4. Par une démarche analogue à ce qui précède, déterminer c_2, s_2, C_2 et S_2 sous forme de combinaison de fonctions élémentaires.

I.5. t_o étant un réel fixé dans $]0,\frac{\pi}{2}[$, on désigne par $\hat{S}_1$ et $\hat{C}_1$ les restrictions des fonctions S_1 et C_1 quand on restreint leur domaine de définition à t dans $[t_o, \pi - t_o]$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant des suites de réels de $]-1,+1[$ convergeant vers +1 et -1 respectivement, déterminer les limites des suites $\left(\hat{S}_1(x_n,t)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\hat{C}_1(x_n,t)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\hat{S}_1(y_n,t)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\hat{C}_1(y_n,t)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Démontrer que ces limites sont atteintes uniformément par rapport à t (pour $\hat{C}_1$, on pourra utiliser l'inégalité ou la formule des accroissements finis).

II - DEUXIEME PARTIE

Dans cette partie, x est un paramètre dont la valeur est égale à 1 et, t_o étant dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, t est une variable dans $[t_o, \pi - t_o]$.

II.1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de réels telle qu'il existe un réel A vérifiant $|a_1 + a_2 + \ldots + a_p| \leqslant A$ dès que $p \geqslant 1$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de réels monotone convergeant vers 0, on pose :

$$A_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_p \qquad \text{et}$$
$$S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_pb_p + \ldots + a_nb_n \quad .$$

Etablir la relation

$$(R_1) : \quad S_n = A_1(b_1 - b_2) + \ldots + A_{k-1}(b_{k-1} - b_k) + \ldots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_nb_n$$

En déduire la relation pour tout $n \geqslant 1$ et tout $p \geqslant 0$:

$$(R_2) : \quad |S_{n+p} - S_n| \leqslant 2A\,|b_{n+1}| \quad ,$$

puis en déduire que la série de terme général $v_n = a_nb_n$ est convergente.

II.2. Considérant la somme $\sum_{p=1}^{n} [\cos(2p-1)t + i.\sin(2p-1)t]$, déduire de II.1 que les séries (C_1) et (S_1) sont simplement convergentes sur $[t_o, \pi - t_o]$.

II.3. En déduire aussi que les séries (C_1) et (S_1) sont uniformément convergentes par rapport à t sur $[t_o, \pi - t_o]$. Ces séries sont-elles normalement convergentes pour la norme de la convergence uniforme ?

II.4. Soit f la fonction 2π périodique sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} t \longrightarrow f(t) = -\frac{\pi}{4} & \text{si} \quad -\pi < t < 0 \ , \\ 0 \longrightarrow f(0) = 0 & \text{si} \quad t = 0 \ , \\ t \longrightarrow f(t) = +\frac{\pi}{4} & \text{si} \quad 0 < t < \pi \ , \\ \pi \longrightarrow f(\pi) = 0 & \text{si} \quad t = \pi \ . \end{cases}$$

Déterminer le développement en série de Fourier de f et en déduire $S_1(1,t)$. La série de fonctions dont le terme général est la fonction : $v_n : t \longrightarrow v_n(t) = \frac{\sin (2n-1)t}{2n-1}$, avec $n \geqslant 1$, est-elle uniformément convergente pour t dans $\mathbb{R}$?

II.5. Soit g la fonction 2π périodique sur $\mathbb{R}$ définie pour $|t| \leqslant \pi$ par $g(t) = |t|$. Déterminer le développement en série de Fourier de g, et retrouver à partir de ce développement celui de f.

III - TROISIEME PARTIE

Dans cette partie : t_o est fixé dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, t est dans $]t_o, \pi - t_o[$, x est dans $[-1,+1]$.

III.1. Etablir que, pour tout x fixé dans $[-1,+1]$, la série (S_1) de fonctions de la variables t est uniformément convergente par rapport à t dans $[t_o, \pi - t_o]$.

III.2. Calculer $\sum_{q=o}^{p} \sin (2n + 2q - 1)t$ et montrer que pour tout $p \geqslant 0$, pour tout t de $]t_o, \pi - t_o[$ et tout x de $[-1,+1]$:

$$\left| \sum_{q=o}^{p} x^{(2n + 2q - 1)} \cdot \frac{\sin (2n + 2q - 1)t}{2n + 2q - 1} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n-1}}{2n-1} \frac{1}{\sin t_o} .$$

En déduire que, pour tout t fixé dans $[t_o, \pi - t_o]$, la série (S_1) de fonctions de la variable x est uniformément convergente par rapport à x dans $[-1,+1]$.

III.3. Rapprocher le dernier résultat de III.2 de l'étude de la suite $\left\{\hat{S}_1(x_n,t)\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ effectuée en I.5 pour retrouver la valeur de $S_1(1,t)$ calculée en II.4 .

III.4. Par une démarche analogue à celle qui précède dans cette partie déterminer $C_1(1,t)$.